A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

Bollettino dei docenti di matematica

69

Dicembre
2014

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

2. Conversioni e trattamenti semiotici nel *problem solving*

Gianfranco Arrigo

The main topic of this paper is *problem solving* and, above all, the role played by semiotic transformations in this field of study. The development of the ability to deal with «real problems» is a core objective in the learning of mathematics. Unfortunately, little time is devoted to this activity at school. To attract teachers' attention to this topic, first the theoretical reasons which underlie the practice of problem solving in class have to be pointed out; then, teachers have to be shown examples and reports of experiences that have been carried out, and this is what this article aims at doing.

Una grande scoperta risolve un grande problema, ma nella risoluzione di qualsiasi problema c'è un pizzico di scoperta. Il tuo problema può essere modesto, ma se stimola la tua curiosità, tira in ballo la tua inventiva e risolvilo con i tuoi mezzi; puoi sperimentare la tensione e gioire del trionfo della scoperta. (George Pólya)

1. Premessa

Il *gestaltista* Max Wertheimer[1] nel suo saggio *Il pensiero produttivo*[2] scritto nel 1943 ci illumina sul processo dinamico del pensiero, di fronte a una situazione problematica. Egli sostiene che, in questi casi, la mente può produrre un'improvvisa intuizione o illuminazione, che chiama *insight*[3]. Dunque, la soluzione di un «vero» problema non è frutto solo di un apprendimento già acquisito, ma soprattutto di una *variazione* globale, da parte del soggetto, della situazione.

Significativa, a tale proposito, la frase seguente (Kanizsa, 1973).

Un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso.

L'aspetto dinamico è caratteristico del modo di affrontare un nuovo problema. Mi piace pensare che quando il soggetto non sa da che parte muoversi per trovare una via risolutiva, quando è ancora nella fase di procedere per tentativi, nella sua mente nascono diverse idee embrionali, grezze, che si muovono in modo del tutto ca-

1. Max Wertheimer (Praga, 15 aprile 1880 – New Rochelle, 12 ottobre 1943) è stato uno dei maggiori esponenti della psicologia gestaltistica assieme a Wolfgang Köhler e Kurt Koffka.
2. Opera pubblicata postuma nel 1945.
3. Termine intraducibile in questo contesto.

suale, come atomi in una reazione chimica, fin quando – se succede – si aggregano in una nuova molecola (un'idea) che dà il via a un processo risolutivo. Questo va poi sottoposto a verifiche e di conseguenza accettato o rifiutato. Continuando la metafora, per favorire la nascita di un'idea risolutiva occorre da un lato aumentare il numero delle idee embrionali e dall'altro aumentare la velocità del loro movimento. Due cose che non si possono insegnare come si usa fare con un algoritmo, ma che vanno sviluppate ponendo il soggetto di fronte a situazioni adeguate, più volte, lungo l'intero arco della sua formazione scolastica.

Per Polya[4] (1945), quando un problema si presenta ostico da affrontare, quando non si vede altra via risolutiva oltre a quelle già inutilmente tentate, si può procedere a una variazione del problema.

*Il successo nella risoluzione del problema dipende dalla scelta del modo di affrontarlo, cioè di attaccarlo dal lato più accessibile; per riuscirci, occorre tentare più volte, variando punti di vista e metodi. È questo che chiamo **variazione**[5] **del problema**.* (Polya, 1945)

E ancora:

La variazione del problema è essenziale. Questo, da un certo punto di vista, avviene come mobilitazione e riorganizzazione di conoscenze formalmente apprese. Occorre richiamare dalla mente certi elementi che si integrano poi nel procedimento risolutivo. Ogni contributo che ha qualche probabilità di mostrare un nuovo aspetto del problema è auspicabile; può riorientare l'interesse e l'attività e stimolare la riflessione.

Già, ma come agisce la mente nella creazione di un'idea? Ce lo ha detto bene Vygotskij (1978) nel passaggio seguente:

Il segno funge da strumento dell'attività psichica, in modo analogo all'utensile nel lavoro. Ma questa analogia, come ogni altra, non implica l'identità di questi concetti simili[6].

Secondo Vygotskij, nelle attività umane, gli utensili di lavoro e i segni hanno peculiarità simili, ma si applicano ad azioni diverse. Gli utensili – intesi come strumenti concreti, tecnici – e i segni – intesi come strumenti psicologici – *sono simili per il fatto che entrambi permettono agli individui di agire e interagire con il loro ambiente, non in forma diretta ma in forma mediata. Eppure sono differenti per il modo in cui essi orientano il comportamento umano. Da una parte, l'utensile è orientato verso l'oggetto dell'attività (per esempio, il controllo della natura). In tal caso l'utensile serve per orientare esternamente il comportamento umano. Dall'altra parte, il segno è un elemento cru-*

4. George Pólya (1887-1985), matematico ungherese. Citazione tratta dal più conosciuto dei suoi tre libri dedicati alla caratterizzazione dei metodi generali che si usano per risolvere i problemi in matematica, scritto poco prima del suo trasferimento negli USA (Pólya, 1945).
5. Termine originale: *variation*.
6. Tratto da D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. e Iori M., 2013.

ciale per l'attuazione di un processo psichico che orienta internamente il comportamento umano.

Eccoci giunti a parlare del tema centrale di questo scritto: il ruolo della semiotica in matematica, più precisamente nel *problem solving*.

Così si esprimono D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2013, pag. 111):

La gestione di algoritmi di qualsiasi tipo e la loro organizzazione in fatti logicamente concatenati in una catena finita, in modo meccanico, da eseguire passo a passo, necessita evidentemente di una significativa gestione semiotica; tutto quel che è algoritmico è rappresentato e dunque la semiotica è un apprendimento fondamentale e trasversale.

Raymond Duval distingue due componenti fondamentali dell'apprendimento semiotico[7]:

1. saper scegliere i tratti distintivi che di un tal oggetto matematico cognitivamente costruito o in via di costruzione si vogliono rappresentare; scegliere il o i registri semiotici che si reputano adatti a tale rappresentazione; dare una rappresentazione semiotica in quel registro; o dare varie rappresentazioni semiotiche in uno o più dei registri scelti;

*2. una volta ottenuta ciascuna rappresentazione semiotica, saperla trasformare in un'altra dello stesso registro (**trattamento**) o di un altro (**conversione**) in modo opportuno, senza perdere di vista il significato dell'oggetto di partenza.*

Come vedremo negli esempi che seguono, la variazione di un problema (secondo Polya) comporta quasi sempre una trasformazione semiotica. Queste attività si svolgono normalmente durante le lezioni di matematica, in ogni ordine scolastico, il più delle volte però in modo inconscio. Troppo spesso è l'insegnante stesso che opera le conversioni (per esempio tra i registri numerico e geometrico), e ciò, se diventa abitudine didattica, non è positivo. Perché è l'allievo stesso che piano piano deve acquisire la capacità, l'abito mentale, di operare simili trasformazioni, di cambiare coscientemente registro, di compiere opportuni trattamenti. È necessario che gli insegnanti lavorino con convinzione in questa direzione: ne trae grande beneficio l'apprendimento e migliora decisamente l'immagine che gli allievi hanno della matematica.

Qualcuno potrebbe pensare che l'apprendimento semiotico concerna forzatamente una matematica di un certo livello. Nulla di più falso: già i problemini che si assegnano nella scuola elementare, per essere risolti, implicano trasformazioni semiotiche affatto scontate.

Ma gli allievi delle elementari e delle medie saranno in grado di usare coscientemente e opportunamente le trasformazioni semiotiche? Certamente sì, anzi, se ben educati e messi nella situazione di poterlo fare, sono in grado di compiere conversioni e trattamenti che spesso lasciano l'insegnante senza parole. Le innumerevoli sperimentazioni fatte finora, delle quali si possono trovare nella letteratura le relazioni, lo

7. Ibidem.

dimostrano ampiamente. Si vedano anche i capitoli 2 e 3 in D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2013) ai quali si aggiungono quelli che riporto nel paragrafo 3 di questo scritto.

All'inizio di questo paragrafo, ho parlato di «vero» problema. Anche se questo termine è sulla bocca degli insegnanti, ritengo opportuno chiarirne ancora una volta il particolare significato che gli si vuol dare. Mi rifaccio al testo di Fandiño Pinilla (2008, pagg. 66-71) che propone la distinzione, oramai «classica», tra *esercizio* e *problema*.

*Gli **esercizi** sono caratterizzati dal fatto che la loro risoluzione richiede solo l'uso di regole già apprese e, semmai, in via di consolidamento; e quindi rientrano nelle categorie: rafforzamento o verifica;*
*i **problemi** coinvolgono o l'uso contemporaneo di più regole (alcune anche in via di esplicitazione), o la successione di azioni la cui scelta è atto strategico, creativo, dell'allievo stesso.*

Una **situazione** (problematica) è tale se fa nascere uno o più problemi o esercizi a seconda del livello scolastico, del modo in cui viene presentata ecc.

Nel testo citato, Fandiño Pinilla si sofferma sull'importanza del contributo di Vygotskij relativo alla caratterizzazione del *problema*. Come si sa, lo psicologo russo suddivide l'apprendimento in tre zone di sviluppo, ordinate secondo la relazione di inclusione: la zona *effettiva*, la zona *prossimale* e la zona *potenziale*. La sua importante intuizione consiste nell'aver creato la zona cuscinetto, detta di sviluppo prossimale, situata tra quella effettiva – ciò che l'allievo sa fare da solo – e quella potenziale – ciò che l'allievo non sa ancora fare, ma che, opportunamente guidato, potrebbe realizzare. La parte più importante dell'apprendimento si gioca appunto in questa zona. È qui che si situano i problemi che contribuiscono allo sviluppo delle capacità strategiche. L'insegnante gioca un ruolo fondamentale e delicato: deve osservare attentamente ogni allievo, cogliere i momenti di sbandamento o di impasse e intervenire con cautela, quel tanto che basta per farlo ripartire, in modo che gradatamente il suo apprendimento si avvicini alla zona potenziale. Quando questa viene raggiunta, il nuovo apprendimento si inserisce nella zona di sviluppo effettivo, arricchendola.

2. Un esempio classico

Il calcolo della somma dei primi n numeri naturali non nulli[8] costituisce un bell'esempio (uno dei tanti, s'intende) per introdurre gli allievi nel meraviglioso mondo della risoluzione di «veri problemi».

Su questo problema esiste un noto aneddoto che ha come protagonista Gauss[9], «principe della matematica»[10]. Si racconta che, come allievo della scuola ele-

8. È pur vero che l'aggiunta dello zero non cambierebbe nulla al risultato, ma lo zero rende, per così dire, innaturale l'aspetto ordinale, per cui, se si parte da zero, l'n-esimo termine è (n–1). Questo fatto costituisce una (inutile) difficoltà, che può quindi essere aggirata iniziando da 1.
9. Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), grande matematico tedesco di Braunschweig.
10. Sono due i nominati «principi della matematica»; l'altro è il nostro Leonhard Euler (1707-1783).

mentare, il piccolo Gauss metteva in seria difficoltà il maestro, perché, quando c'era il compito di matematica, finiva molto prima degli altri e poi disturbava regolarmente. Una bella mattina però, dopo che, come sempre, il ragazzino consegnò il compito eseguito perfettamente, si vide assegnare dal maestro un dovere supplementare: calcolare la somma di tutti i numeri naturali da 1 a 100. L'insegnante era sicuro che, così, per un bel po' di tempo, in classe sarebbe regnata la quiete. Purtroppo per lui fu solo un'illusione, perché, dopo pochissimo, Gauss gli presentò il risultato corretto (5050). «Come avrà fatto?», si sarà chiesto l'esterrefatto insegnante.

Eccoci introdotti in questo primo problema. Sembrerebbe (ma non è sicuro) che Gauss abbia proceduto così (per comodità uso la nostra simbologia):

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 2 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + & 99 & + & 100 \\
S_n & = & 100 & + & 99 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2 \cdot S_n & = & 101 & + & 101 & + & \ldots\ldots\ldots & + & 101 & + & 101 \\
2 \cdot S_n & = & 100 \cdot & & = 10100 & & & & & & \\
S_n & = & 10100 & : & 2 & = & 5050 & & & &
\end{array}
$$

3. La variazione di un problema

L'idea vincente che ebbe lo scolaro Gauss consiste nell'operare una *variazione* del problema, sempre secondo Pólya (1945). Essa consiste nel modificare o cambiare il problema in modo da crearne un nuovo (o una serie di problemi) la cui soluzione può aiutare a risolvere il problema originale.

Lo scolaro Gauss, invece di lavorare sulla sola somma S_{100}, ha considerato due somme S_{100}, scritte l'una con addendi crescenti e l'altra con addendi decrescenti. Il problema è diventato più facile da risolvere, perché la somma $S_{100}+S_{100}$ ha potuto calcolarla semplicemente osservando che, associando a due a due gli addendi in verticale, ottiene una nuova somma di 100 addendi tutti uguali a 101, che traduce nella moltiplicazione ($101 \cdot 100$).

La variazione ha permesso di cambiare il problema in uno più facile. Occorre infine *interpretare* il risultato ottenuto. Non è quello che voleva l'insegnante (ottiene $2 \cdot S_{100}=10100$), ma la soluzione del problema primitivo la raggiunge semplicemente dividendo per 2 il risultato 10100. La somma S_{100} di tutti i numeri naturali da 1 a 100 è quindi 5050 (=10100/2).

Quando è giunto il momento di iniziare l'allievo al calcolo letterale, si può proporre la generalizzazione di questa situazione. Ciò implica un cambiamento, delicato ma importante (una conversione) di registro semiotico: dal numerico al letterale. Al posto di 100 si mette, per esempio, n e di conseguenza 101 va sostituito con (n+1). Si giunge direttamente alla nota formula:

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

E se si volesse calcolare la somma di un segmento non iniziale di numeri interi? Per esempio da 11 a 20, o da 33 a 58? Si può ricondurre il problema a quello basilare, appena risolto. Per riuscirci, occorre però di nuovo eseguire una variazione, per esempio operando un trattamento nel registro numerico:

$11 + 12 + 13 + \ldots + 19 + 20 = (10+1) + (10+2) + (10+3) + \ldots + (10+9) + (10+10) =$
$= 10 \cdot 10 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10) = 100 + 10 \cdot (10 + 1) : 2 = 155$

Volendo generalizzare, si può giungere alla somma di k numeri naturali consecutivi, a partire da un qualunque numero a:

$$a + (a+1) + (a+2) + \ldots + [a+(k-1)] = k \cdot a + [1 + 2 + \ldots + (k-1)] = k \cdot a + [(k-1) \cdot k] / 2$$

La difficoltà maggiore consiste nel saper esprimere S_{k-1} da S_k, ciò che implica un adattamento della situazione precedente, o, in altri termini, un trattamento che permette di passare dalla situazione «k» alla nuova «k–1».

Si potrebbe aggirare l'ostacolo, operando un diverso trattamento nel registro algebrico. La progressione aritmetica generalizzata potrebbe essere scritta ponendo a=b+1:

$b+1 , b+2 , \ldots , b+k$

di conseguenza la somma diventerebbe

$$(b+1) + (b+2) + \ldots + (b+k) = k\,b + (1+2+\ldots+k) = k\,b + k\,(k+1)/2 = k\,(b + (k+1)/2)$$

formula inusuale, che può essere ottenuta senza dover effettuare il passaggio dalla situazione «k» alla «k–1», ma che esige un diversa rappresentazione algebrica della somma. Le due formule ottenute devono per forza essere equivalenti, il che è facilmente verificabile sostituendo a nella prima con b+1, oppure b nella seconda con a–1. Banalità? Sicuramente sì, per chi ha dimestichezza con il calcolo letterale, ma diversa è la situazione dell'allievo principiante che, messo di fronte ai due iter risolutivi, può innanzi tutto vedere come una generalizzazione può essere effettuata in vari modi e inoltre è fortemente stimolato a controllare che le due formule ottenute «sono la stessa cosa», il che gli offre la possibilità di operare su un'espressione letterale seguendo un obiettivo preciso. Diciamo che le due generalizzazioni sono state ottenute con trattamenti diversi operati nel registro algebrico.

Operando per analogia, sempre nel registro algebrico, l'allievo stesso potrà anche raggiungere la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica:

$$P_n = a + (a+d) + (a+2\,d) + \ldots + (a+(n-1)\,d) = n\,a + d\,(1+2+\ldots+(n-1)) =$$
$$= n\,a + d\,\frac{(n-1)n}{2} = n\,\frac{2\,a + d\,(n-1)}{2} = n\,\frac{a + (a + d\,(n-1))}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

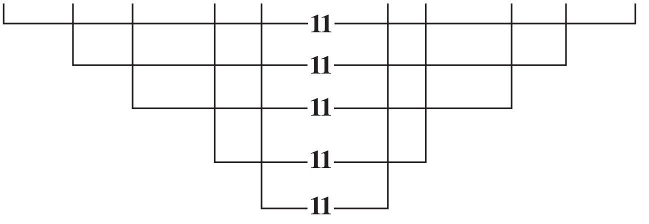
con a_1 primo termine (a_1=a) e a_n ultimo termine [= a + d (n–1)]; il che lo porta all'enunciazione della nota «regola» – primo termine più ultimo termine, diviso 2, per il numero di termini – che è del tutto inutile (anzi, pericoloso!) memorizzare. Certo, non è facile, non è immediato, ma la conversione dal registro numerico a quello algebrico e i diversi trattamenti algebrici sono il fondamento del calcolo generalizzato ed è proprio lavorando su casi concreti come questo che l'allievo può raggiungere i due obiettivi che ogni insegnante di scuola media si prefigge in questo ambito: sviluppare le abilità fondamentali del calcolo letterale e compiere un passo decisivo verso la generalizzazione di un problema numerico.

È, questa, l'unica variazione che può essere compiuta relativamente al calcolo della somma di tutti i numeri naturali da 1 a n? Certamente no, e per fortuna! La ricchezza della matematica sta anche nella sua peculiarità di offrire continuamente situazioni che possono essere elaborate in molti modi e a diversi livelli di difficoltà, ciò che stimola in modo importante le capacità creative del soggetto che apprende e permette a ognuno di percorrere la propria strada secondo le proprie forze.

3.1. Variazione mediante trattamento nel registro numerico

Per comodità, partiamo dal calcolo di $S_{10} = 1 + 2 + \ldots + 10$. La peculiarità di questo iter risolutivo consiste nel considerare «liberamente» la somma S_{10}, nel senso del calcolo ragionato, cioè non addizionando ordinatamente i termini dal primo al decimo, ma associandoli a coppie, in modo opportuno. Per esempio, prendendo a due a due i termini estremi.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =$$



Si ottiene così: $S_{10} = 11 \cdot 5 = 55$

Concedendo al rigore una piccola e ragionevole porzione, con allievi alle prime armi con la generalizzazione del calcolo, si può, per esempio, continuare generalizzando. L'unica variabile in questo problema è il numero di addendi. Occorre quindi fare bene attenzione come questo numero interviene nel calcolo. La somma S_{10} può essere così espressa:

$$S_{10} = (10+1) \cdot (10:2) = [(10+1) \cdot 10] : 2$$

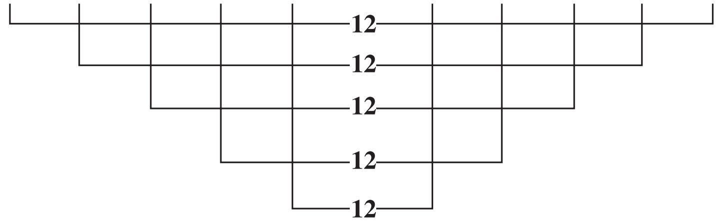
ciò che ci conduce a scrivere

$$S_n = (n+1) \cdot \frac{n}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

e ottenere una nota formula, ma, ciò che più conta, a raggiungere una prima generalizzazione del problema, relativamente al caso che n sia un numero pari.

A questo punto ci si deve occupare del caso n dispari. Ovviamente seguirà l'iter risolutivo appena descritto. Per esempio, per calcolare S_{11} si può procedere così:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + **6** + 7 + 8 + 9 + 10 + 11



$S_{11} = 12 \cdot 5 + 6 = 66$ (l'aggiunta del 6, termine mediano, è ciò che fa la differenza con il caso precedente)

Di nuovo l'espressione ottenuta può essere riscritta facendo bene attenzione al ruolo giocato dal numero dei termini (11) e dal termine mediano, a sua volta dipendente dal numero dei termini ($6 = (11 + 1) : 2$).

$$S_{11} = (11+1) \cdot [(11-1) : 2] + (11 + 1) : 2$$

Tutto ciò viene tradotto sostituendo 11 con la variabile n; si ottiene:

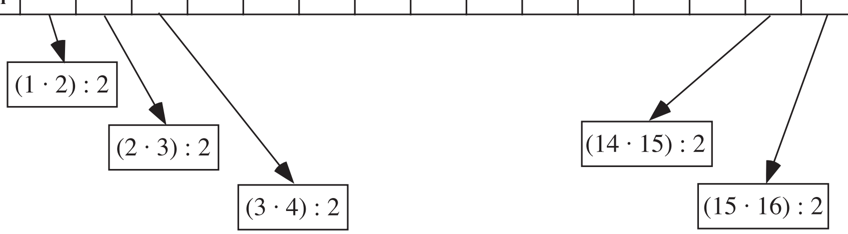
$$S_n = \frac{(n+1)\cdot(n-1)}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n-1+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

si ritrova (non senza soddisfazione) la nota formula di prima, che quindi può essere considerata valida per qualunque numero n dei suoi termini.

3.2. Variazione basata su un trattamento dinamico nel registro numerico

Esempio: calcolo della somma $S_{15} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 15$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
S_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120



$S_{15} = (15 \cdot 16) : 2 = 120$

Siamo di fronte a un trattamento più profondo del precedente. La caratteristica di questa operazione consiste nel porre l'attenzione sulle somme parziali successive:

$S_1 = 1 = (1 \cdot 2) / 2$, $S_2 = 3 = (2 \cdot 3) / 2$, $S_3 = 6 = (3 \cdot 4) / 2$ e così di seguito.

Il procedimento è di tipo dinamico e si inserisce nelle situazioni concernenti le successioni numeriche. Ecco un altro campo importante quanto affascinante del *problem solving*. Si tratta più precisamente di intuire una[11] possibile legge generale che permetta di trovare l'n-esimo termine di una successione numerica, conoscendo un segmento iniziale. A differenza delle variazioni precedenti (statiche), in questa l'aspetto dinamico è centrale. La struttura algebrica della successione delle somme parziali viene portata alla luce esaminando e confrontando i suoi termini successivi, quindi percorrendola, muovendosi dinamicamente. Nella fase di intuizione non si procede necessariamente in modo ordinato, come presentato sopra. È poco probabile che qualcuno inizi dalla prima somma parziale. Normalmente si procede per tentativi, fin che si nota l'elemento invariante, cioè la struttura algebrica $k(k+1)/2$. Può anche succedere che l'attenzione si concentri solo sulla struttura $k(k+1)$ come doppio di ciò che si vorrebbe e che poi induce direttamente la divisione per 2.

La generalizzazione è ottenibile direttamente:

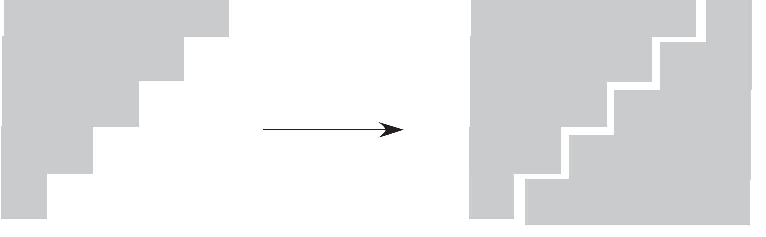
$S_{15} = (15 \cdot (15+1)) / 2$

$S_n = (n \cdot (n+1)) / 2$

3.3. Variazione basata su una conversione nel registro geometrico-figurale

A volte può risultare vincente operare una conversione in un registro diverso da quello nel quale abitualmente si opera: nel nostro caso, dal numerico al geometrico-figurale.

Esempio: calcolo della somma $S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$



La somma può essere rappresentata da un poligono rettangolo formato di (5+4+3+2+1) quadratini isometrici, come mostrato dalla figura di sinistra. L'idea è di costruire due di questi poligoni e accostarli come si vede nella figura di destra. Si ottiene così un rettangolo composto di (5·6) quadratini.

Si ottiene così: $S_5 = (5 \cdot 6) : 2 = 15$

Generalizzazione: $S_n = (n \cdot (n+1)) : 2$

11. Uso l'aggettivo indeterminativo perché, in senso strettamente matematico, questi problemi non sono determinati.

Un vantaggio di questa variazione consiste nel fatto che, di solito, la figura (il rettangolo $n\cdot(n+1)$), e di conseguenza la formula, si fissano più facilmente nella mente dell'allievo. Ma ve n'è un altro, più nascosto e non meno importante: quello di attirare l'attenzione sul fatto che, a volte, basta operare una conversione in un diverso registro semiotico per ottenere una situazione più chiaramente decifrabile, che suggerisce un iter risolutivo praticabile, non visibile nella situazione di partenza.

4. Un'esperienza in alcune classi di quinta primaria[12]

Tutto quanto riferito fin qui potrebbe apparire difficilmente realizzabile in classe. Di solito gli insegnanti si mostrano scettici quando si dice loro di mettere ogni tanto gli allievi di fronte a veri problemi. Chi però accetta di provare mettendoci un po' di coraggio, ma soprattutto sapendo che, a volte, cambiando la prassi, rompendo il contratto didattico, si ottengono risultati insperati, come messo bene in evidenza da D'Amore (2014). È proprio ciò che si è costatato anche nelle attività svolte in alcune classi di quinta, verbanesi e luganesi, che presento nel seguito.

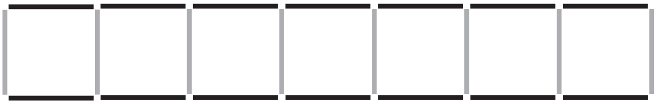
4.1. «Quanti bastoncini?»

La figura rappresenta una composizione di 7 quadrati costruiti con alcuni bastoncini: quanti sono i bastoncini?
Quanti bastoncini occorrono per una composizione di 100 quadrati?

La prima domanda, banale, serve per chiarire il senso del problema. Non è necessario che la situazione sia presentata in modo testuale. Si potrebbe, per esempio, ricostruire la struttura su un tavolo, usando bastoncini di fortuna (matite, cannucce, …). Il problema diventa interessante con la seconda domanda. Non avrebbe senso infatti tentare di costruire l'intera figura. Per poter rispondere alla domanda, occorre scoprire la struttura matematica soggiacente. «Ci riusciranno i miei alunni?» è la domanda che si pone all'inizio l'insegnante. La risposta che abbiamo avuto sta negli elaborati raccolti, che riproduciamo fedelmente.

12. Ci si riferisce alla Giornata di animazione matematica effettuata nella primavera del 2013 negli Istituti di scuola primaria Peron e Tomassetti, Verbania, con la partecipazione delle insegnanti Marina Giacobbe, Lorella Maurizi e Tiziana Minazzi e a un susseguente pomeriggio matematico svoltosi nella scuola della Gerra, Lugano, nella classe della maestra Lorella Marcis. Organizzazione e animatori: Società Matematica della Svizzera Italiana (SMASI), Lugano.

Soluzione 1 (registro figurale; trattamento statico)

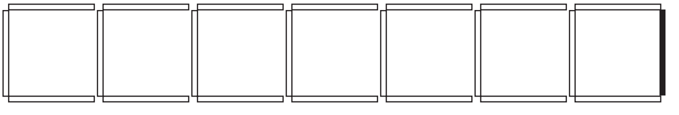


Per 7 quadrati:
Abbiamo contato 7+7+8 = 22 bastoncini
Per 100 quadrati:
Abbiamo sommato i cento bastoncini sopra e i cento bastoncini sotto e poi per chiudere la fila abbiamo aggiunto nei bastoncini verticali +1. In tutto 301 bastoncini.

Questi allievi hanno contato seguendo un criterio schematico di tipo statico: il numero di bastoncini delle due file orizzontali addizionato con quello dei bastoncini verticali.

Generalizzazione: n + n + (n+1) = 3 n + 1

Soluzione 2 (registro figurale; trattamento dinamico)

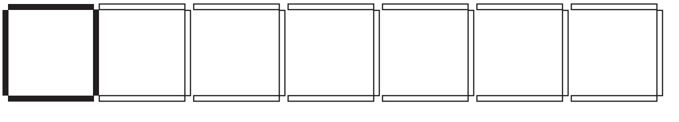


Per 100 quadrati:
Ho contato i primi tri (sic!) *e li ho moltiplicati per cento e poi ho aggiunto uno per completare l'ultimo quadrato, fanno 301 bastoncini.*

Questo iter risolutivo è basato sulla ripetizione del modulo base costituito di tre bastoncini assemblati a forma di «C» (indicati col termine «tri»). Il trattamento adottato è decisamente di tipo dinamico. Alla fine la catena viene chiusa con un bastoncino supplementare posto in verticale.

La generalizzazione è diretta: 3 · n + 1 = 3 n + 1

Soluzione 3 (registro figurale; trattamento dinamico)



Abbiamo calcolato 4+3+3+3+3+3+3 che viene 22
Abbiamo fatto [(100–1)x3]+4 = [99 x 3]+4 = 297+4 = 301 perché il 4 è il primo quadrato, l'uno è la differenza tra i quadrati e il primo e il tre è perché ogni quadrato ha tre lati (sic!).*»*
E PER MILLE? Devo fare 3 x 999 + 4 = 2997 + 4 = 3001»

Il trattamento operato da questi allievi è molto simile a quello precedente. Vi sono però differenze che è bene sottolineare. Intanto qui si parte da un elemento base, il primo quadrato, separato dal resto della struttura, che è una successione composta dalla ripetizione di un modulo, una «C» simmetrica rispetto a quella usata nella soluzione precedente, (n–1) volte. L'espressione «ogni quadrato ha tre lati» è ovviamente da intendersi come «ogni quadrato è completato dall'aggiunta di tre lati».

Generalizzazione: $4 + 3 \cdot (n-1) = 4 + 3\,n - 3 = 3\,n + 1$

Soluzione 4 (registro figurale; trattamento dinamico, sfruttamento della risposta alla prima domanda)

Abbiamo contato 22 bastoncini.

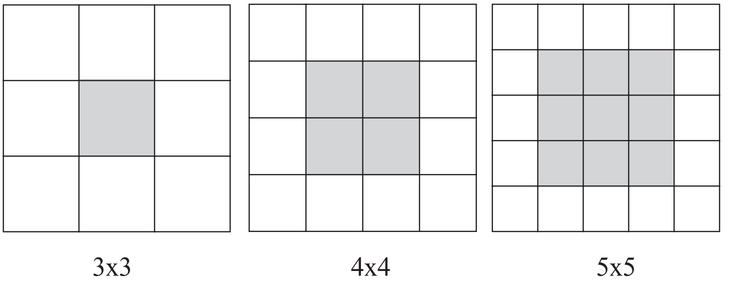
Abbiamo contato quanti bastoncini ci sono in un quadrato, poi abbiamo trovato la regola di aggiungere sempre 3 bastoncini. Poi abbiamo fatto (100 – 7) x 3 e poi abbiamo aggiunto 22 che sono i bastoncini per fare 7 quadratini.

$(100 - 7) \cdot 3 + 22 = 93 \cdot 33 + 22 = 279+22 = 301$

La peculiarità di questa soluzione, interessante quanto imprevista, sta nel fatto che per risolvere il caso n=100, questi alunni hanno sfruttato il risultato già ottenuto per n=7 e di lì hanno immaginato di completare dinamicamente la struttura con la ripetizione di (100–7) moduli uguali a quelli usati nella soluzione precedente. Un modo di agire tutt'altro che banale e contemplato anche dai teorici del *problem solving*, consistente, quando è possibile, nello sfruttare un risultato già trovato in precedenza. Anche se all'adulto ciò sembra ovvio, non sempre il risolutore principiante pensa a questa possibilità. Una volta acquisita sufficiente esperienza nella risoluzione di problemi, anche questo modo di procedere diventa una sorta di automatismo, al quale far capo quando serve.

Generalizzazione: $22 + (n - 7) \cdot 3 = 22 + 3 \cdot n - 21 = 3\,n + 1$

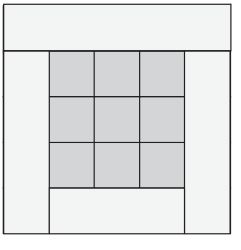
4.2. «Quante piastrelle bianche?»



La figura rappresenta tre pavimentazioni di uno stesso quadrato, mediante moduli quadrati isometrici di due colori (grigio e bianco), aventi la stessa struttura che si può desumere dall'osservazione. Si chiede di completare la seguente tabella:

tipo di pavimento	3x3	4x4	5x5	6x6	10x10
numero di □ piastrelle bianche	8				

Soluzione 1 (registro figurale; trattamento statico)



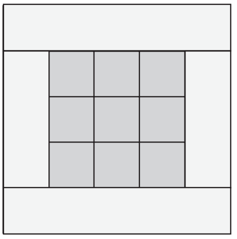
Per trovare un quadrato 5x5 abbiamo fatto: 5 + 4 · 2 + 3 = 16
(…)

Questi allievi si sono concentrati sulla cornice 5x5, forse più comoda per ragionarci, che hanno scomposto in tre tipi di elementi, rispettivamente da 5, 4 e 3 quadratini. La figura è stata interpretata in modo statico, con una certa sistematicità. In seguito hanno proceduto analogamente per completare l'intera tabella, il che implica il riconoscimento dei termini variabili n, (n–1) e (n–2). Anche se non hanno esplicitamente usato lettere, si intravede già una prima conversione nel registro algebrico, un primo passo verso la generalizzazione del problema.

Generalizzazione: per n=10: $10 + (10–1) \cdot 2 + (10–2)$

per n: $n + (n–1) \cdot 2 + (n–2) = n + 2n – 2 + n – 2 = 4n – 4 = 4(n–1)$

Soluzione 2 (registro figurale; trattamento statico)



Quadrato 5x5

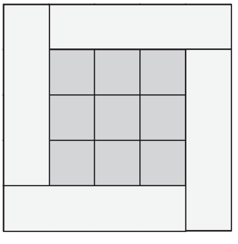
Abbiamo contato 2 lati poi per le due colonne sono 2 in meno rispetto al primo

5 + 5 +3 · 2 = 16

Questa soluzione è molto simile alla precedente. Anche qui il completamento della tabella è avvenuto per analogia. Si può apprezzare per il fatto che la suddivisione appare più sintetica. Si sono considerate solo due parti (ciascuna presa due volte); per esempio, per n=5, le due parti sono composte di 5 e di 3 (=5–2) quadratini. Siamo di nuovo di fronte a una prima conversione verso il registro algebrico.

Generalizzazione: $2 \cdot n + 2 \cdot (n–2) = 2\,n + 2\,n – 4 = 4\,n – 4 = 4\,(n–1)$

Soluzione 3 (registro figurale; trattamento parzialmente dinamico)



5x5: da ogni lato del pavimento togliamo 1 quadretto moltiplicando per 4, perché 4x5 fa 4 in più

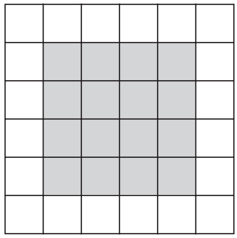
Cioè (per n=5): 4 · (5–1) = 16

Nonostante la spiegazione un tantino contorta e l'iniziale intervento statico concernente nel togliere un quadretto in corrispondenza dei quattro vertici, si intravede un trattamento dinamico nel quale un unico modulo si ripete 4 volte, secondo rotazioni di 90˚.

La generalizzazione è diretta: per n=10: $(10–1) \cdot 4 = 36$

per n: $(n–1) \cdot 4$

Soluzione 4 (conversione nel registro geometrico)



Quadrato 6x6

Abbiamo sottratto 4x4 che era l'area della parte grigia a 6x6 che era l'area del quadrato bianco

$6 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = 36 - 16 = 20$

Questa è la soluzione che quasi tutti gli adulti propongono di getto. Per contro, pochissimi allievi di quinta l'hanno adottata. Probabilmente è ancora una questione che riguarda i registri semiotici. Il problema assegnato concerne i numeri naturali e quindi l'allievo non pensa subito al calcolo di aree, nel quale di solito opera con numeri decimali. La sottrazione delle aree ci appare come fatto dinamico; gli allievi invitati a spiegare meglio il metodo adottato hanno usato i verbi «taglio», «tolgo», «tiro via», azioni, appunto, dinamiche. Questo modo di agire implica una conversione dal registro figurale a quello geometrico (additività delle aree).

Generalizzazione: $n^2 - (n-2)^2 = n^2 - n^2 + 4n - 4 = 4n - 4 = 4(n-1)$

Soluzione 5 (conversione nel registro numerico; trattamento dinamico)

3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9	10x10	50x50	100x100
8	**12**	**16**	20	24	28	32	36	196	396

+4 +4 +4 +4 +4 +4 +4

Ho visto 8 poi 12 poi 16 allora sono sempre andato avanti di 4. Aggiungi sempre 4 ma se non è il numero ma quello dopo ancora aggiungi 8.

Ecco una soluzione che non ti aspetti! Questo allievo si è concentrato sulla successione numerica della quale conosce il segmento iniziale, facilmente ottenibile dalle figure proposte: 8, 12, 16. Il registro figurale è presto abbandonato e l'allievo, intuito che per trovare un termine della successione basta aggiungere 4 al termine precedente, opera una conversione nel registro numerico e completa la tabella velocemente. È notevole l'espressione *«Aggiungi sempre 4 ma se non è il numero ma quello dopo ancora aggiungi 8»*, perché, anche se detto in modo poco elegante, testimonia la presenza dell'aspetto dinamico nel suo pensiero.

Generalizzazione: $8 + 4 \cdot (n-3) = 8 + 4 \cdot n - 12 = 4n - 4$

Soluzione 6 (registro numerico, trattamento errato)

x 10

tipo di pavimento	3x3	4x4	5x5	6x6	10x10	100x100
numero di □ piastrelle bianche	8	12	16	20	36	360

x 10

PER UNA COMPOSIZIONE DI 100x100?
Calcolo: 36 x 10 = 360 quadretti»

Questo allievo, dopo aver partecipato alla soluzione del problema nella forma assegnata, ha voluto strafare, nell'intento, forse, di farsi notare. Pensa di ottenere il numero di piastrelle bianche di un pavimento 100x100, moltiplicando per 10 il corrispondente numero di un pavimento 10x10. Opera un trattamento… azzardato, coraggioso, sì, ma sfortunato perché in questa situazione non vi è alcun rapporto di proporzionalità. L'allievo avrebbe anche potuto capirlo osservando per esempio che, dalla tabella, 20 ≠ 8x2 o che 36 ≠ 16x2.

La presenza di un errore importante come questo, può essere una buona occasione per apprendere cose nuove. Qui si tratta di prendere coscienza del fatto che non tutte le situazioni sono rette da funzioni lineari; in altre parole che non sempre, raddoppiando, triplicando ecc. la variabile, raddoppia, triplica ecc. anche il risultato.

In generale: $k \cdot (4\,n - 4) \neq 4 \cdot (k\,n) - 4$

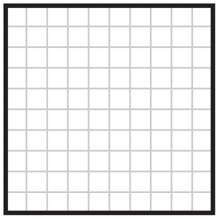
4.3. «Quante sbarrette?»

Le figure che seguono mostrano il segmento iniziale di una serie di strutture ottenute saldando insieme sbarrette metalliche unitarie.

Quante sbarrette occorrono per una struttura di lato 10? E per una di lato 100?

lato 1 lato 2 lato 3 lato 4

Soluzione 1 (registro figurale; trattamento statico)



lato 10

Per lato 10: abbiamo fatto 9 · 10 = 90, poi 90 · 2 = 180, poi abbiamo aggiunto il contorno 10 · 4 = 40 ; 180 + 40 = 220
Per lato 100: 99 · 100 = 9900 ; 9900 · 2 =19800 ; 19800 + 400 = 20’200

Questi allievi hanno suddiviso il lavoro in due tappe: l’una concernente l’interno della struttura e l’altra l’esterno (contorno). Per contare le sbarrette interne, hanno considerato separatamente le file orizzontali e quelle verticali. Il trattamento nel registro figurale è di tipo statico.

Generalizzazione: interno: $(n-1) \cdot n \cdot 2$
esterno: $4\,n$
totale: $(n-1) \cdot 2\,n + 4\,n = 2\,n^2 - 2\,n + 4\,n = 2\,n^2 + 2\,n = 2\,n\,(n+1)$

Soluzione 2 (registro figurale; trattamento statico)

Per n=4: ci sono 5 linee verticali di 4 sbarrette ciascuna e altrettante orizzontali pure di 4 sbarrette ciascuna. In tutto 20 + 20 = 40
Per n=10: 11 · 10 + 11 · 10 = 110 + 110 = 220
Per n=100: 101 · 100 + 101 · 100 = 10’100 + 10’100 = 20’200

Soluzione interessante, perché la suddivisione verticale-orizzontale è stata fatta sull’intera struttura. Si è così sfruttato pienamente il suo carattere bidimensionale. Così il calcolo si semplifica. Anche questo trattamento è di tipo statico.

Generalizzazione: $n \cdot (n+1) \cdot 2 = 2\,n\,(n+1)$

Soluzione 3 (registro numerico; trattamento dinamico)

lato 1	lato 2	lato 3	lato 4	lato 5	lato 6	lato 7	lato 8	lato 9	lato 10
4	12	24	40	60	84	112	144	180	220
4·**1**	4·**3**	4·**6**	4·**10**	4·**15**	4·**21**	4·**28**	4·**36**	4·**45**	4·**55**

Abbiamo fatto $4 \cdot 3 = 12$, $4 \cdot 6 = 24$, $4 \cdot 10 = 40$ e abbiamo trovato i numeri triangolari 3, 6, 10.

Abbiamo continuato $4 \cdot 15 = 60$, $4 \cdot 21 = 84$, $4 \cdot 28 = 112$, $4 \cdot 36 = 144$, $4 \cdot 45 = 180$, $4 \cdot 55 = 220$.

Per n=100, abbiamo fatto $(100 \cdot 101) : 2 = 5050$ e poi $5050 \cdot 4 = 20'200$

Di nuovo assistiamo a una decisa variazione del problema mediante conversione dal registro figurale a quello numerico, nel quale gli allievi hanno posto l'attenzione unicamente sulla successione. Sono stati facilitati dal fatto che avevano già lavorato sui numeri triangolari, quindi li hanno riconosciuti. Può darsi che abbiano ricevuto il suggerimento di scomporre i numeri delle sbarrette del segmento iniziale in un prodotto di due fattori, uno dei quali sia 4. Questi allievi hanno visto in prima persona come a volte può essere utile sfruttare risultati già incontrati. L'abilità nel *problem solving* si acquista anche arricchendo il proprio bagaglio di esperienze con la memorizzazione di risultati utili.

Generalizzazione: $4 \cdot \dfrac{(n+1) \cdot n}{2} = 2\,n\,(n+1)$

5. Qualche osservazione conclusiva

Tutti i problemi considerati in questo scritto sono stati presentati mediante una figura, concernono unicamente numeri naturali e sono retti da successioni numeriche. Per ogni problema affrontato, gli allievi hanno ricevuto una scheda, sulla quale erano invitati a scrivere la soluzione trovata, accompagnata da una spiegazione del metodo seguito. Ognuno era libero di lavorare in piccoli gruppi o singolarmente. Qualche insegnante ha accompagnato la figura con spiegazioni date oralmente, per fare in modo che le diverse consegne fossero state ben comprese. Qualcuno ha introdotto la problematica mediante manipolazione di materiali di fortuna. È stato detto che avremmo gradito di più le spiegazioni, del risultato. Questo modo di fare è importante nelle attività di *problem solving* e serve non solo al ricercatore, ma anche all'insegnante per regolare al meglio il lavoro in classe e, non da ultimo, all'allievo stesso che, dovendo riferire sul proprio operato, è costretto a ripensare ciò che ha fatto e a tradurlo in un testo comprensibile. Non da ultimo, sembrerebbe che le esperienze così fissate su carta si collochino meglio nella mente del soggetto.

La limitazione ai numeri naturali è dovuta più che altro al fatto che si tratta di problemi discreti. Nelle attività che abbiamo presentato, la presenza, anche se non sempre esplicita, della successione numerica è determinata dal fatto che in ogni problema vi è un solo elemento variabile f(n) con $n \in \mathbf{N}$. Essa induce anche iter risolutivi di tipo dinamico, cioè non metodi basati su un'unica figura e poi estesi per analogia alle altre, ma procedimenti che consistono nel porre l'attenzione sui passaggi da uno stadio k a quello successivo (k + 1). L'abitudine a intraprendere simili modi di ragionare costituisce un potenziale che arricchisce di molto l'abilità di risolvere problemi. Ovviamente si proporranno poi altre situazioni nelle quali si potranno far intervenire i numeri razionali, anche in forma frazionaria o percentuale, come anche situazioni non numeriche, problemi impossibili o indeterminati.

La risoluzione di problemi non deve assolutamente costituire un evento eccezionale nella pratica di classe, ma dev'essere accompagnata all'attività di messa a punto dei vari concetti e di affinamento dei procedimenti (non solo di calcolo) previsti dai programmi. Deve dare senso all'intero apprendimento della matematica sia come modo di risolvere problemi detti concreti (pratici) oppure astratti (perché no? A molti allievi piacciono!), sia come possibilità di sviluppare le capacità creative (trovare nuovi metodi risolutivi, inventare nuovi problemi).

La varietà dei procedimenti risolutivi proposti da questi allievi è notevole, secondo molti insegnanti assolutamente inattesa. La facilità con la quale operano conversioni da un registro semiotico a un altro e trattamenti all'interno di uno stesso registro, adottando metodi risolutivi sia statici che dinamici, dimostra senza mezzi termini che le attività di *problem solving* possono (anzi, devono) essere proposte il più presto possibile già a partire dalla scuola elementare e continuate negli ordini scolastici successivi. In generale, se ne fanno troppo poco, o non del tutto. Gli insegnanti devono convincersi che lo sviluppo delle capacità di affrontare problemi –veri problemi- è un obiettivo centrale nell'apprendimento della matematica. A queste attività si deve quindi dedicare uno spazio adeguato. Altrimenti si continuerà a formare giovani, capaci di ripetere, anche brillantemente, iter risolutivi lungamente esercitati, ma che, di fronte a situazioni mai incontrate, non sanno come agire.

La complessità del mondo attuale ha indotto un appesantimento esagerato dei programmi scolastici, anche di quelli di matematica, causando un eccessivo carico di nozioni e procedimenti algoritmici che gli allievi sono costretti, per così dire, a stipare nella loro mente. Parecchie cose che si insegnano oggi in lunghe lezioni ripetitive, potrebbero essere tagliate dai programmi per dare maggior spazio alla risoluzione di problemi, il che si traduce poi in un apprendimento sempre più consapevole e ragionato della matematica e di ogni altra disciplina. Ed è proprio questo che la società odierna, il mondo del lavoro, la vita sociale e politica chiedono alla scuola.

Bibliografia

D’Amore B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di Gérard Vergnaud e di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index. [Versione cartacea e versione e-book].

D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. e Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica*. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Pitagora editrice.

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell’apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson.

Kanizsa G. (1973). Il «problem solving» nella psicologia della Gestalt. In: Mosconi G., D’Urso V. (a cura di). *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera, p. 35.

Pólya G. (1945). *How to Solve It*. Princeton: University Press. Versione italiana (1967). *Come risolvere i problemi di matematica: logica ed euristica nel metodo matematico*. Milano: Feltrinelli.

Vygotskij L. (1978). *Mind in Society. The development of Higher Psychological Processes*. Cambridge (Massachussets): Harward University Press.

Wertheimer M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper Collins. Versione italiana (1997). *Il pensiero produttivo*. Trento: Giunti.